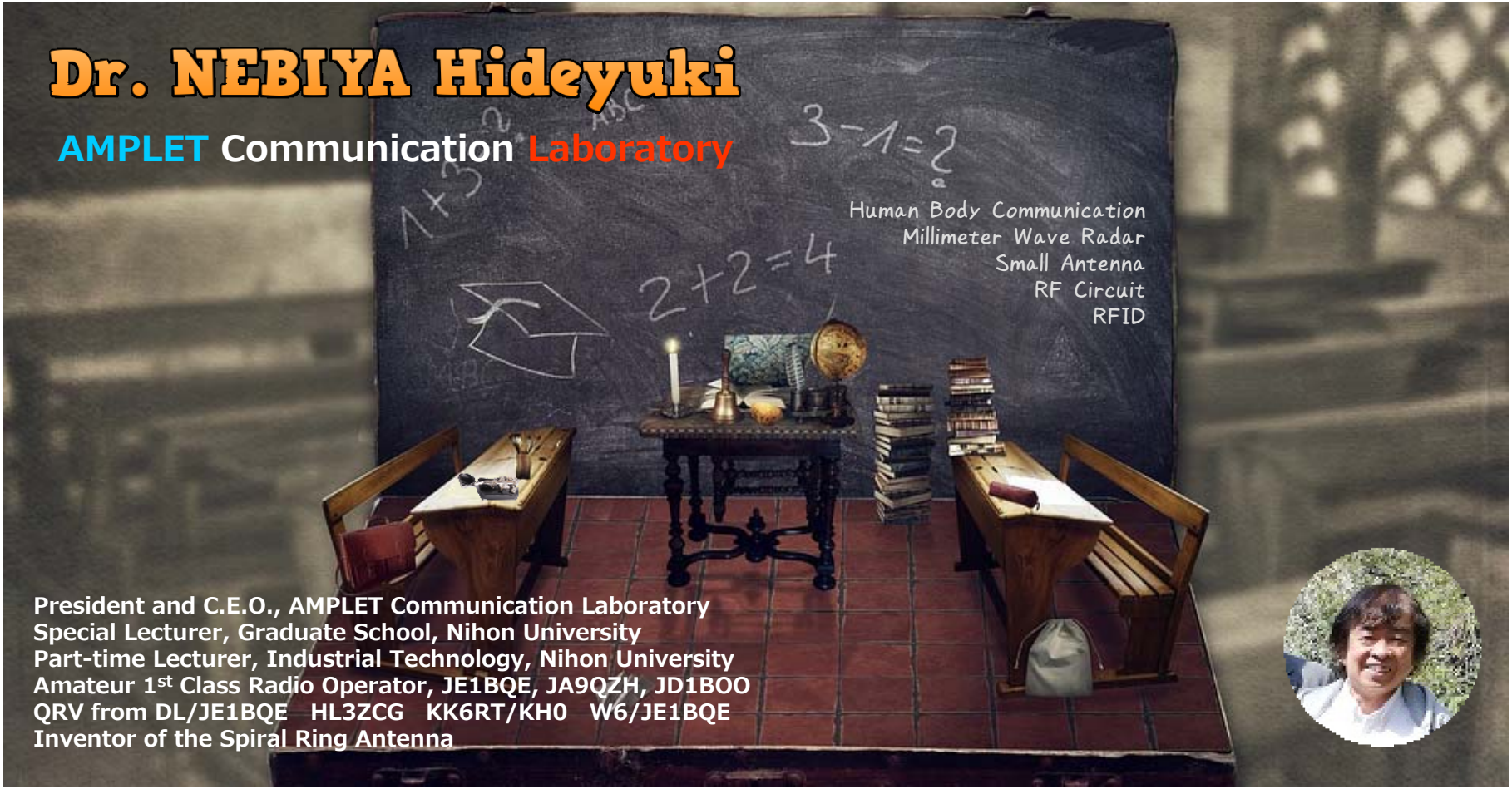
電磁気学の物理現象から数式を組み立てる



第3回 生産工学特別講義

担当 根日屋 英之

2024年9月20日 3時限

目　次

はじめに
1. オームの法則と電磁気学の関係
2. 電界と磁界
    2-1.　磁界って何？
    2-2.　電界って何？
3. 物理現象と数式を結びつける
4. Maxwell の方程式を理解していただきます

はじめに

根日屋英之の職業・研究経歴

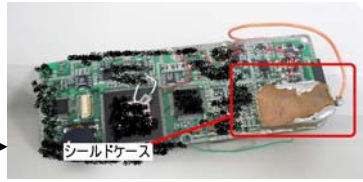
AMPLET Communication Laboratory

1980年4月 ～ NISSAN MOTOR CORPORATION

1981年4月 ～ Institute of Industrial Science, the University of Tokyo
東京大学生産技術研究所

1983年5月 ～ HITACHI
Inspire the Next

1987年9月 ～ President of AMPLET



The World's First **cdmaOne** (IS-95) Cellular Telephone
(1996 in Korea)

2016年4月 ～ Director of AMPLET Communication Laboratory

HBC or Something New ? !

研究と講義（教員）

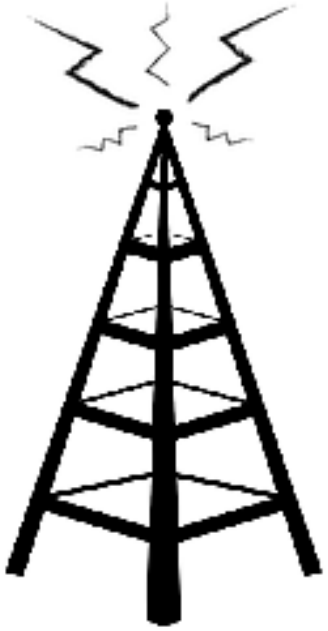
2002年 ～ 2017年

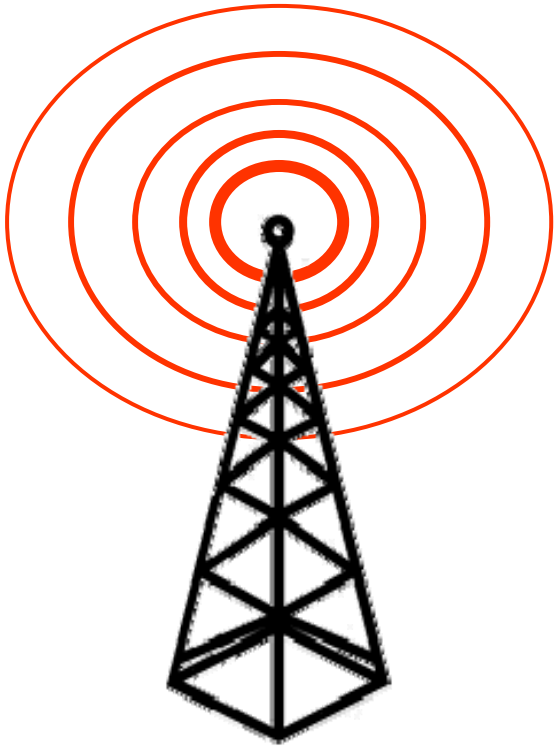
2011年～ 2017年

N.CST 自主創造 日本大学 Nihon University, College of Science and Technology.

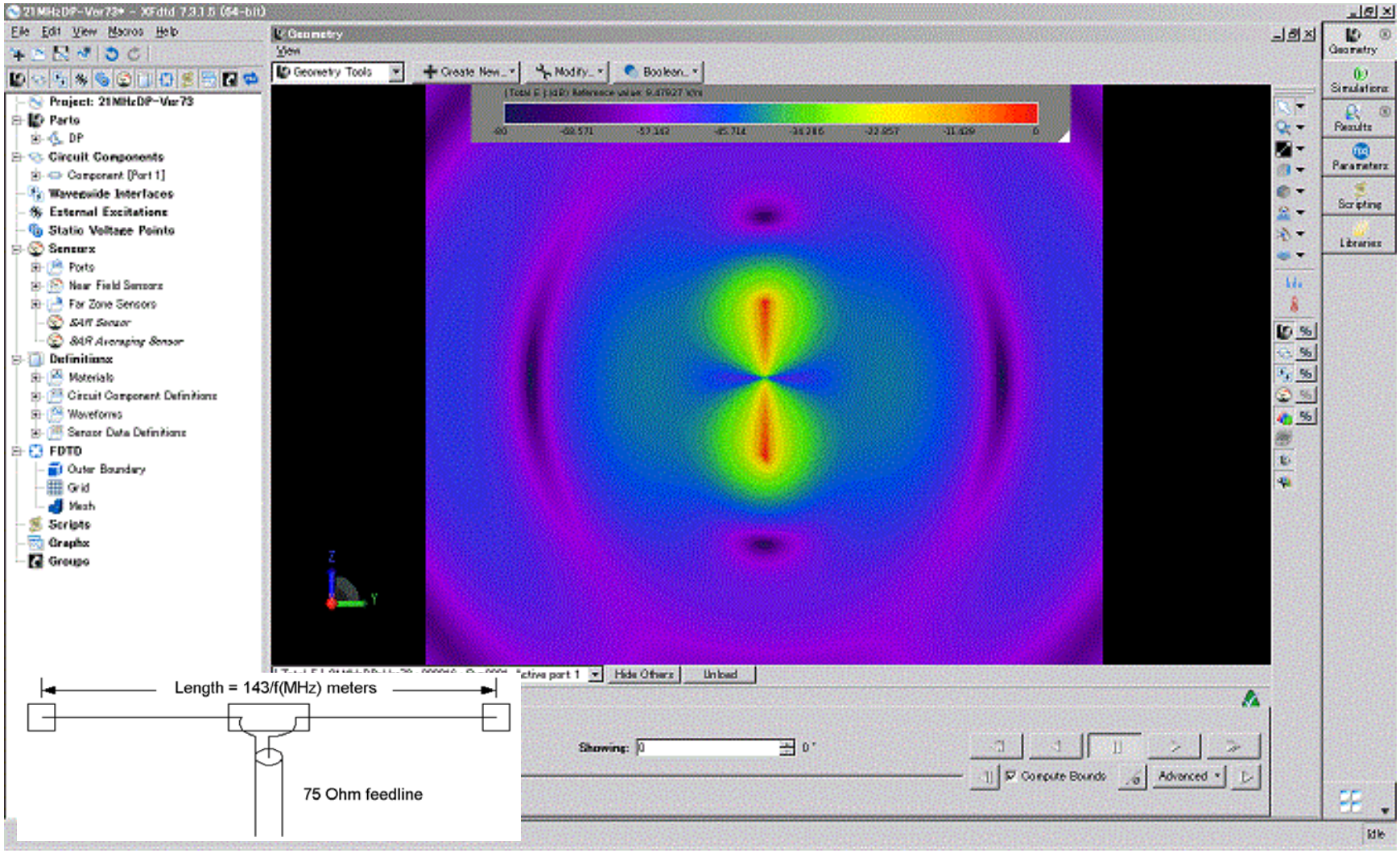
2015年～

電波の放射はどちらか？

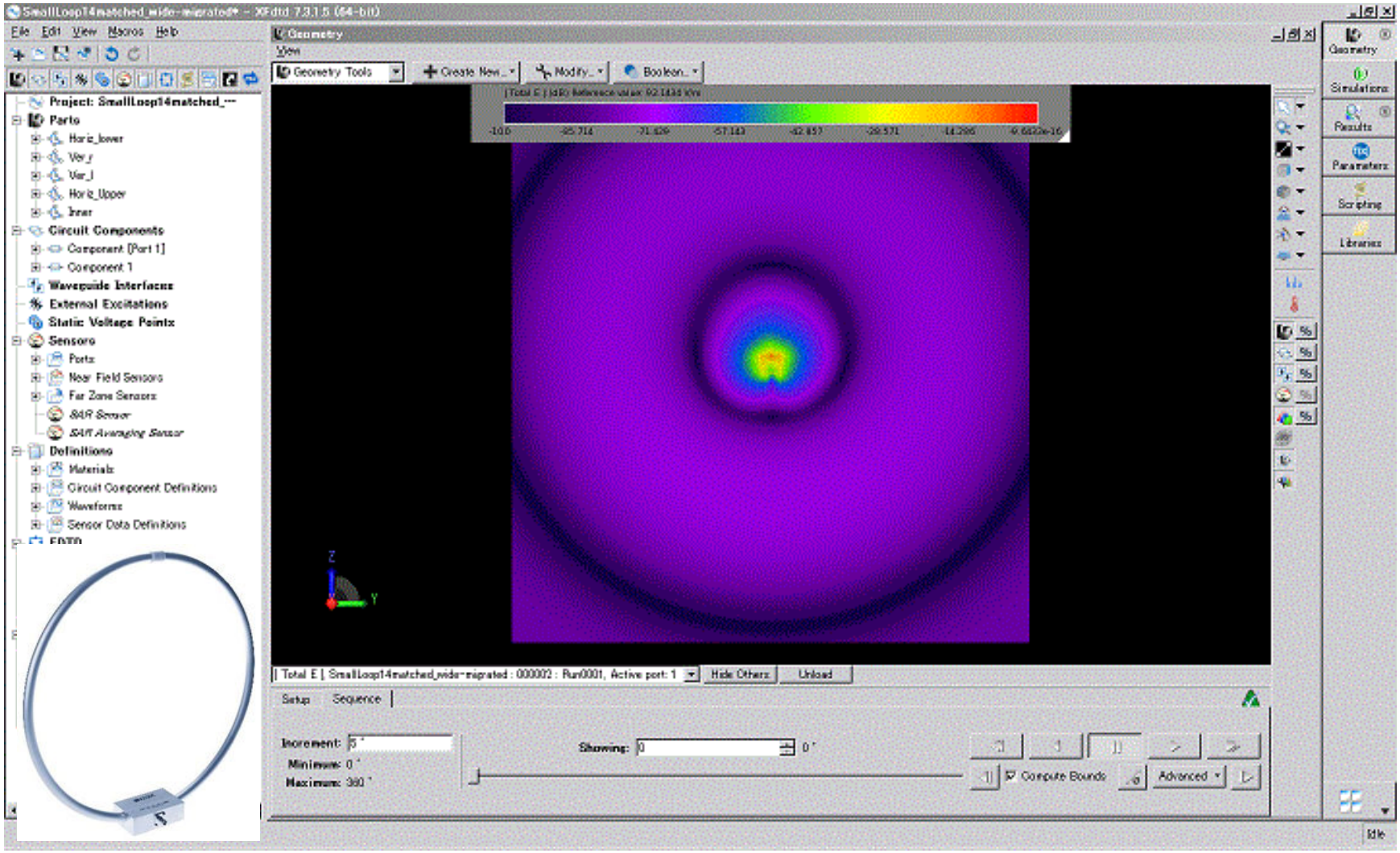




ダイポールアンテナからの放射



ループアンテナからの放射



1. オームの法則と電磁気学の関係

電磁気学もオームの法則で解けるのか？

直流回路のオームの法則 ： V＝I・R と W＝V・I

電圧(V) ＝ 電流(I) × 抵抗(R)

電力(W) ＝ 電圧(V) × 電流(I)

＝ 電圧$(V)^2$ ÷ 抵抗(R)

＝ 電流$(I)^2$ × 抵抗(R)

電磁気学もオームの法則でできるのか？

できる！

球面において，各部の電力密度 *Pd* [W/m²] を全球面で積分すると放射源の電力と等しくなる．電界強度を *E*，磁界を *H*，自由空間のインピーダンスを 377（≒ 120π ）[Ω] とすると，E＝377H なので，

$$P_d = EH = \frac{E^2}{377} = 377H^2 \quad \longleftrightarrow$$

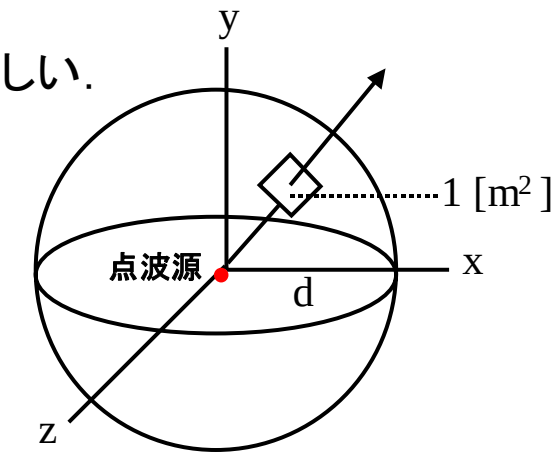
オームの法則

$$P = VI = \frac{V^2}{R} = RI^2$$

となる．等方性アンテナ（点波源）は，*Pd* はどの点でも等しい．
ここで，半径＝rの球では，その表面積Sは 4πr² なので，

$$P = 4\pi r^2 P_d$$

となる．



蛇足

空間インピーダンス η ＝376.730314 が正しくて，120 π は近似値.

それを知る学生も大人も少なくて，逆と思っている人が多い.

わずか 0.69/1000 の違いであるが，私も学校で習った記憶が無い.

蛇足：

光速 c＝299,792,458 [m/s] で，人間が透磁率 μ ＝4 π ×10^{-7} と決めた.

$c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ より，誘電率 ε ＝1/(μ c^2)＝8.85418782×10^{-12} なので，

$\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon} = 376.730314 \quad [\Omega]$ （あるいは η ＝ μ c)と半端な数となる.

＊ 時間も長さも，単位を人間が勝手に決めた. μ だけは数学の美を持たせたけれど，手遅れでした.

2.　電界と磁界

「界」とは何か？

目に見えない不思議な力が存在する空間を

カイ

「界」

という.

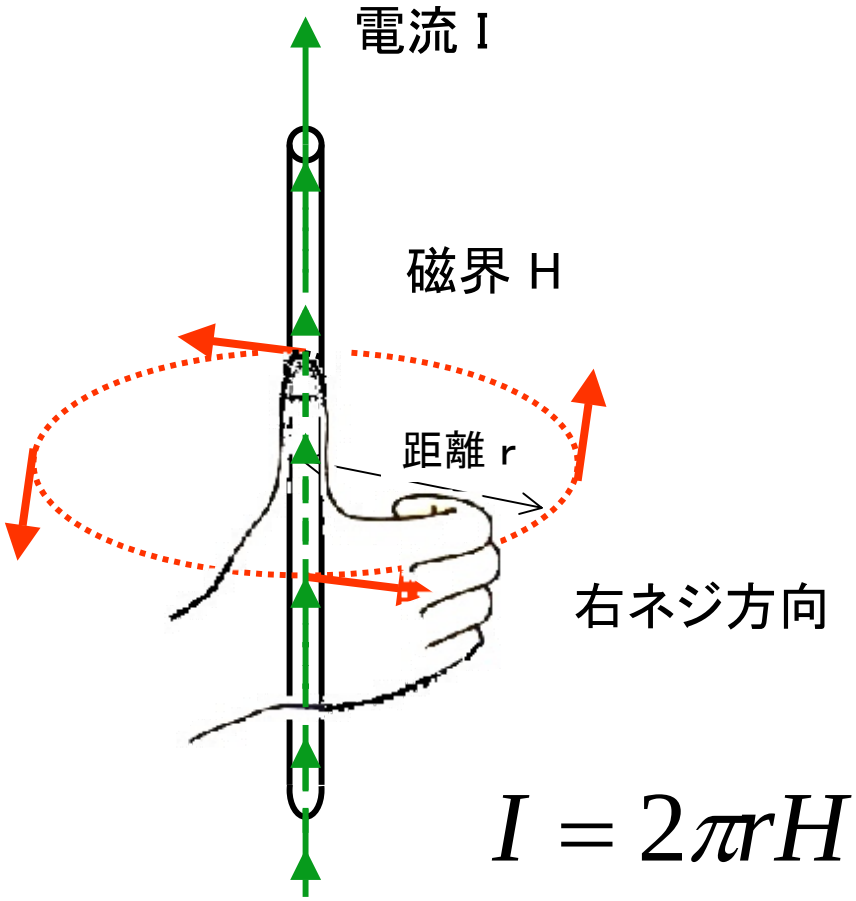
2-1. 磁界って何？

磁石の力 ･･･ 磁界(磁場)

磁石はS 極とS 極，あるいはN 極とN 極は反発し，S 極とN 極は引き合う．このとき目に見えない力が発生している．

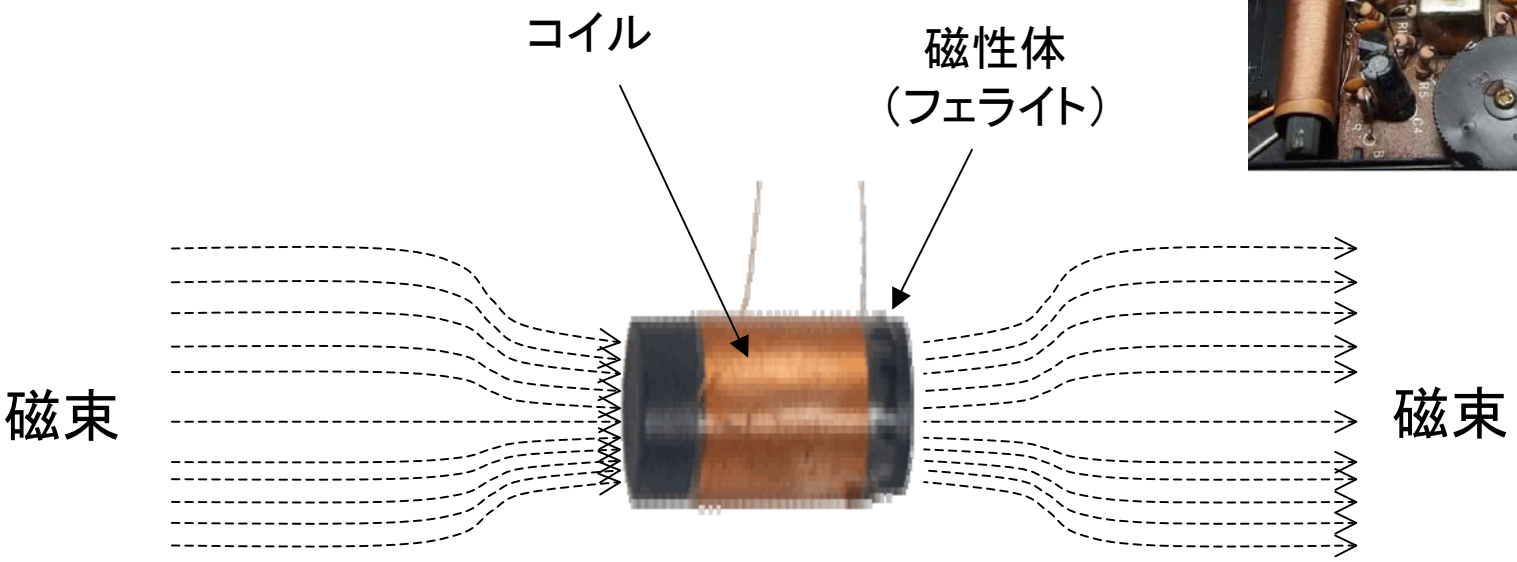
この力が存在している場所のことを，磁場とか磁界という．

アンペールの法則



$$I = 2\pi r H$$

磁性体をアンテナに用いる



フェライトバーアンテナ

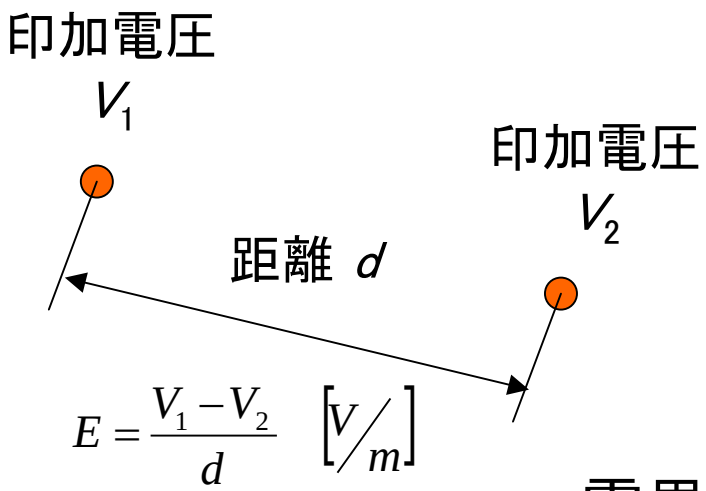
磁性体を用いるとアンテナのインダクタンス（コイルの巻き数）が増えたようにみえる

2-2. 電界って何？

静電気の力

子供の頃に，静電気を使って，こんな遊びをしたことはありませんか？

電界の発生

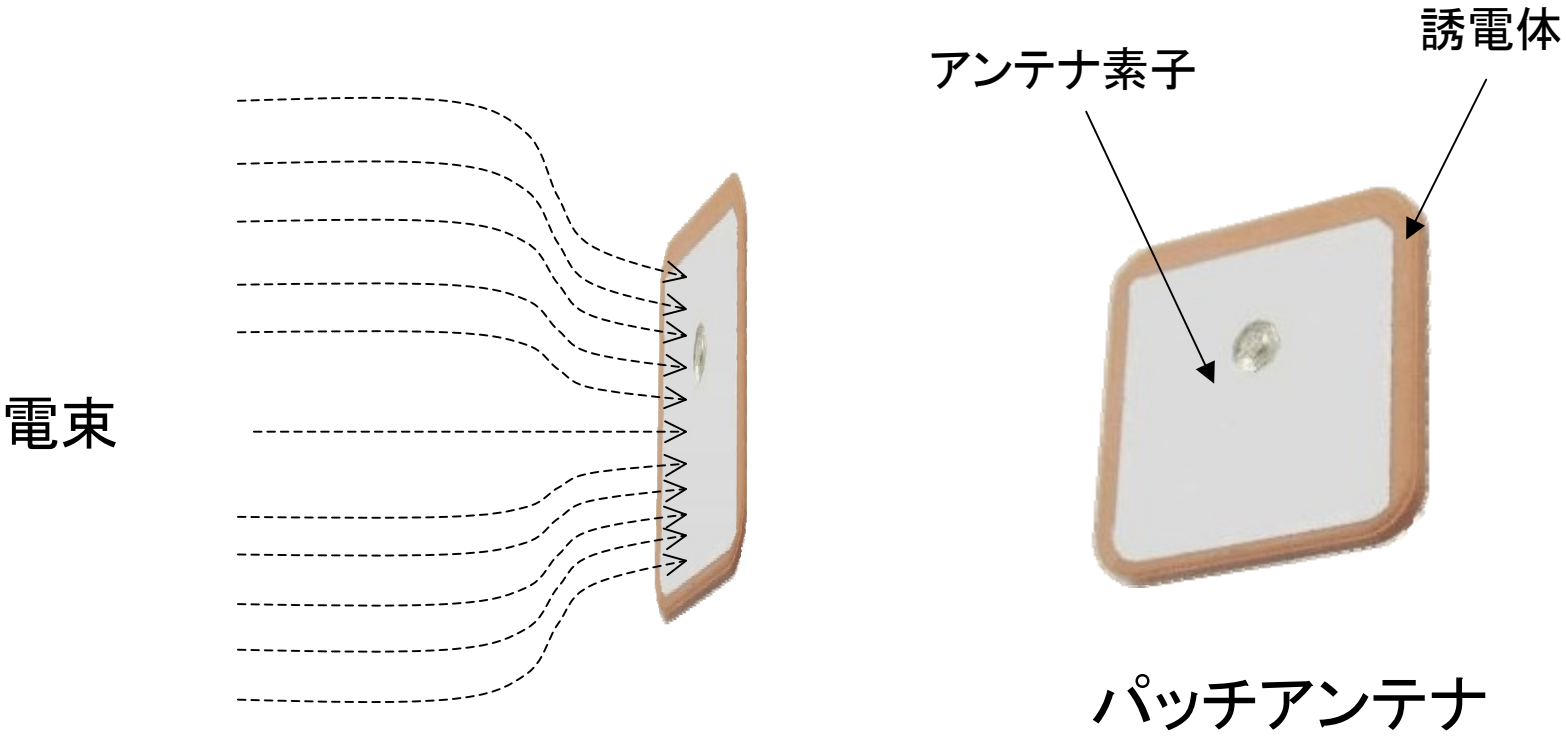


電界の定義

2点間の電位差を、その2点の距離で割った値

$$\text{電界強度}\ E = \frac{V_1 - V_2}{d} \quad [V/m]$$

誘電体をアンテナに用いる

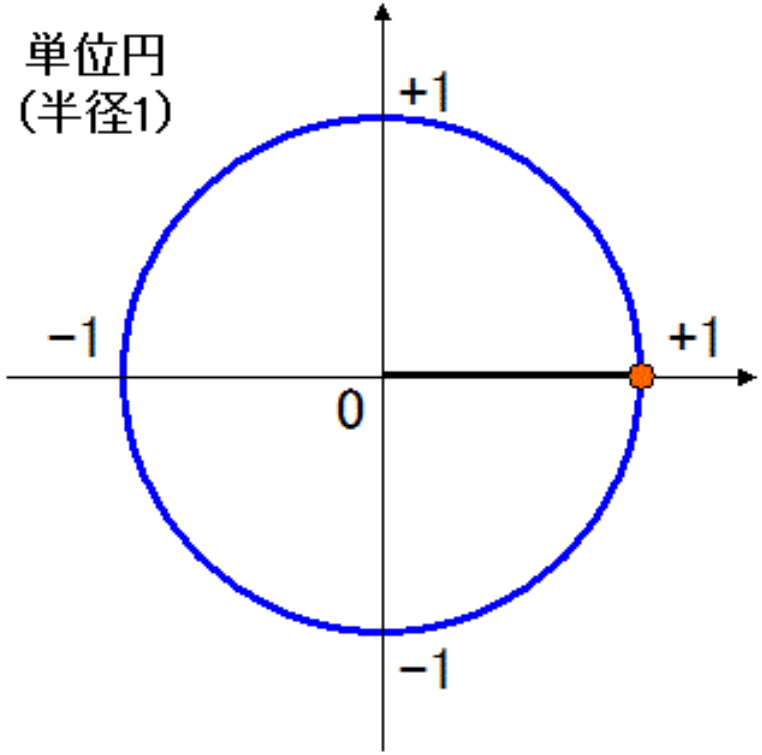


誘電体を用いるとアンテナは小形化できる

3. 物理現象と数式を結びつける

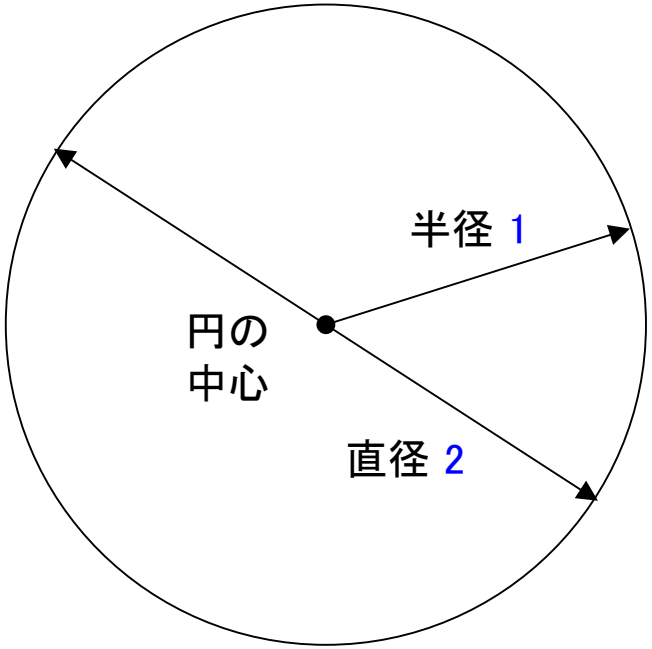
数学と物理現象を結びつけるもの

→　それは半径1の単位円



全ての基本は半径「1」の円（単位円）から始まる

単位円



円周の長さ 2π

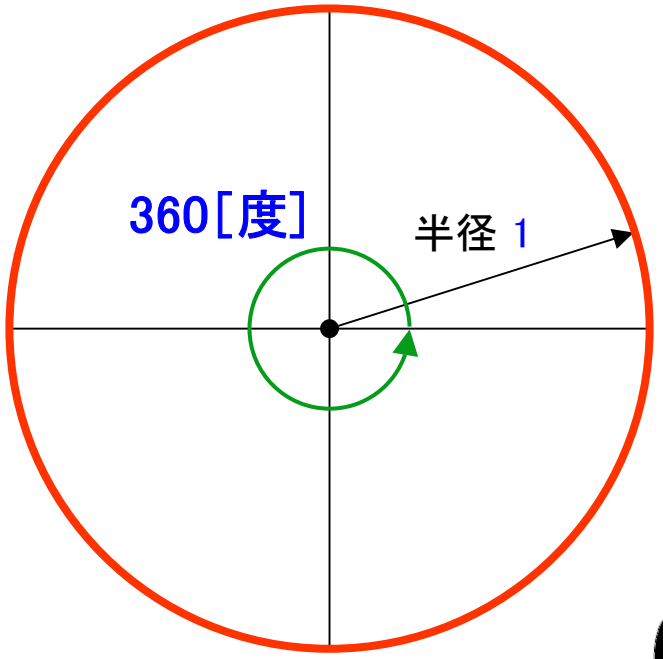
半径 1 の円（単位円）において

⇒ 直径は 半径 × 2
= 1 × 2
= 2

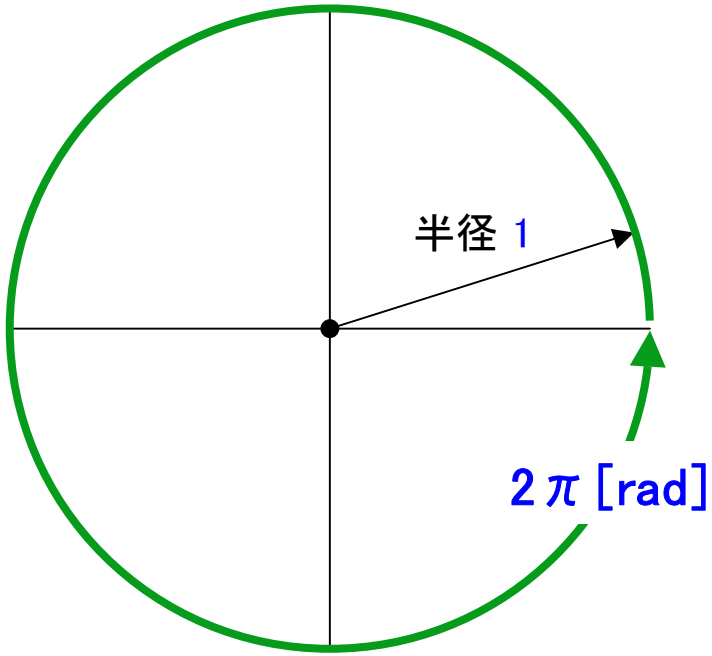
⇒ 円周の長さは 直径×円周率
= 2 × π
= 2 × 3.14

数学屋さんと物理屋さんが共通認識を持つには・・・

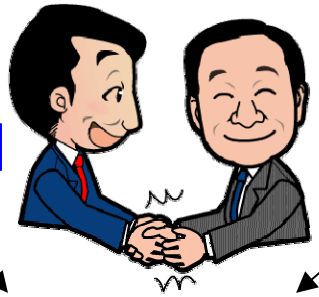
単位円



単位円



数学屋さんの1周は 360[度]

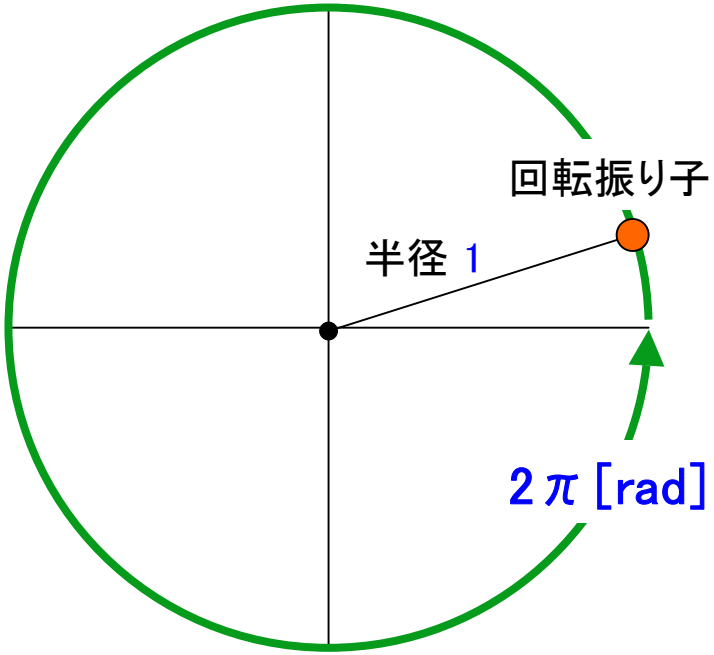


物理屋さんの1周は 2π [rad]

360[度] ＝ 2π [rad]

周波数 f と角速度 ω

単位円



1周は 2π [rad]

回転振り子を考える.

1秒間に回転振り子が f 周 回転すると

その回転振り子が動いた距離 ω は

ω ＝ 2π（1周の長さ）× f （回転）

＝ $2\pi f$

となる.

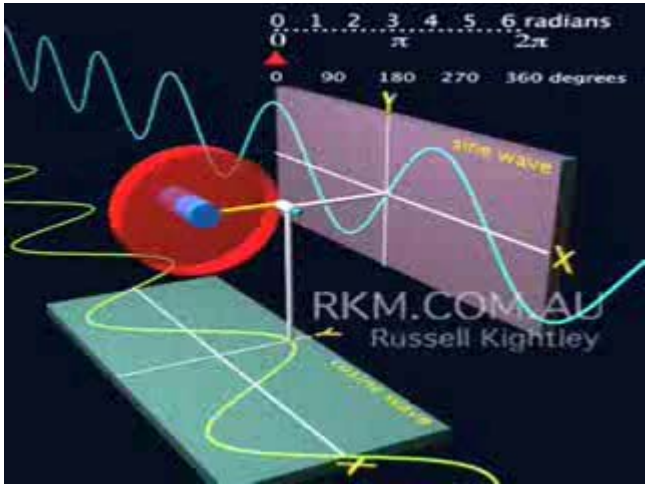
ここで f を周波数（単位は Hz），

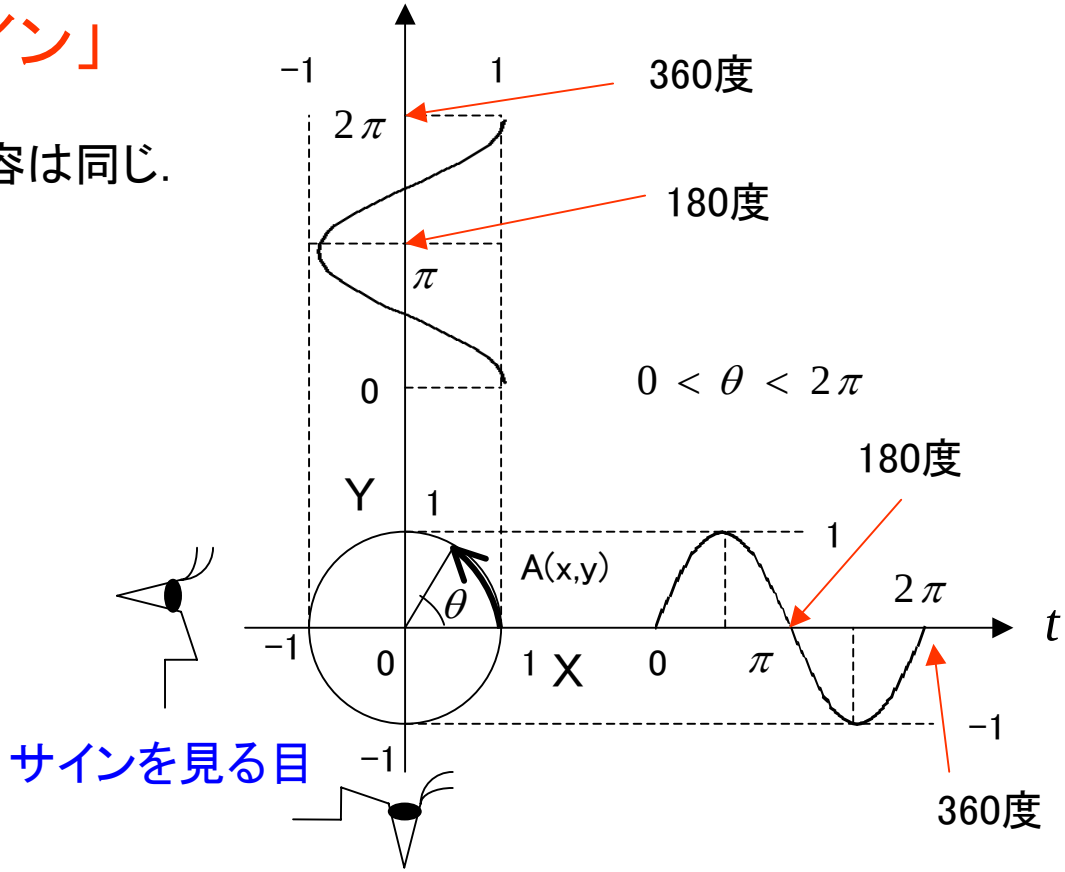
ω を角速度（単位は rad/秒）と呼ぶ.

正弦関数(サイン)と余弦関数(コサイン)

「サイン」と「コサイン」

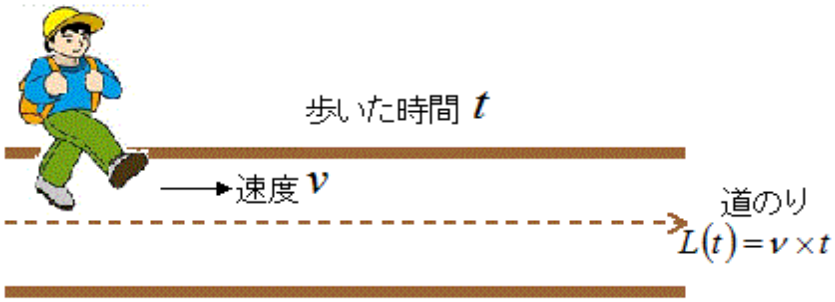
は見つめる方向が違うだけ．内容は同じ．





中学生でもわかる
波動方程式は「道のり＝速度×時間」

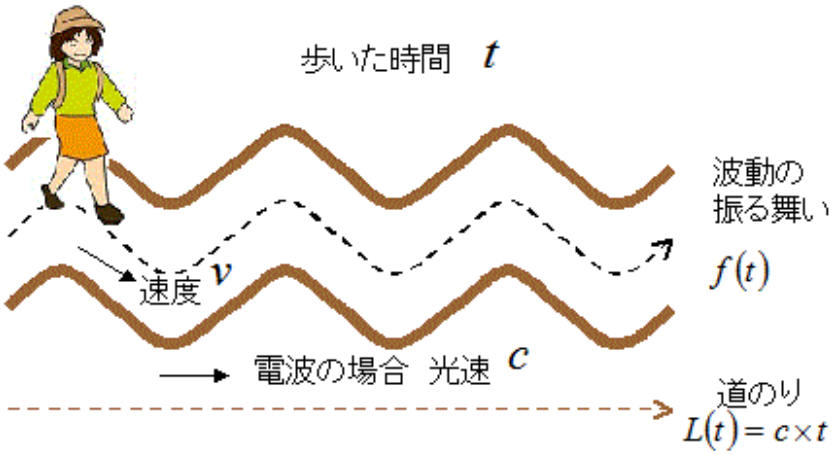
波動関数は「道のり＝速度×時間」のようなもの



歩いた道のり $L(t)=v\times t$

速度

歩いた時間



波動の振る舞い $f(t)=\sin(v\times t)$

くねくね歩いたという意味　速度　歩いた時間

$$=\sin(2\pi f\times t)$$

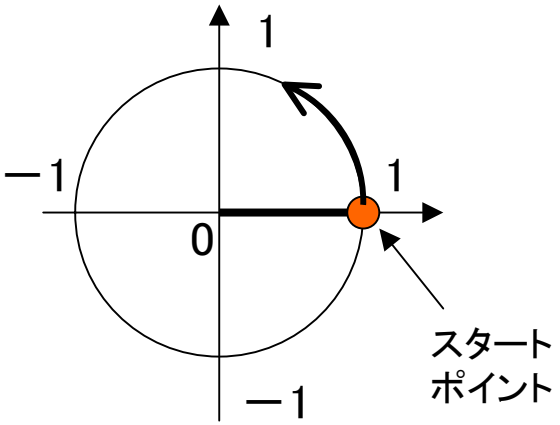
1秒間に進む距離 ＝ 円周長×周波数

$$=\sin(\omega\times t)$$

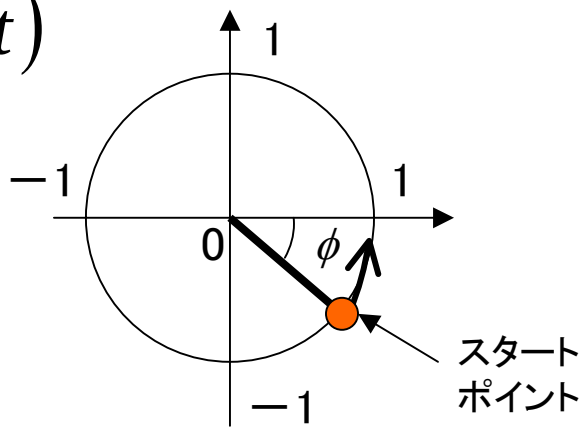
角速度　歩いた時間

歩いた道のり $L(t)=c\times t$

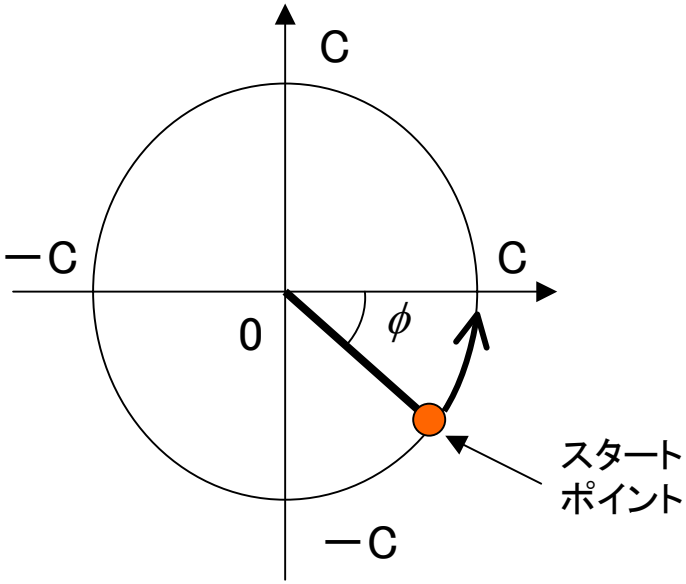
波動方程式



$$f(t) = \sin(2\pi ft)$$

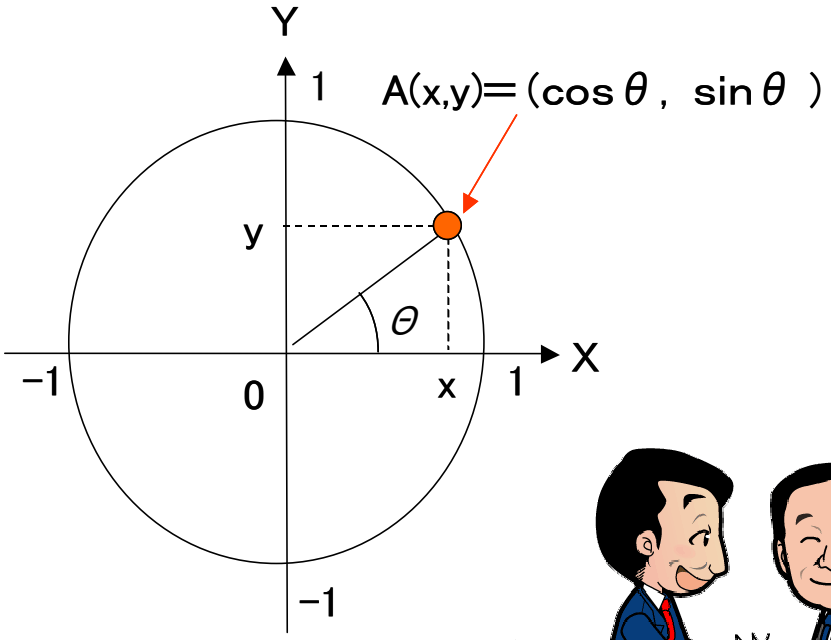


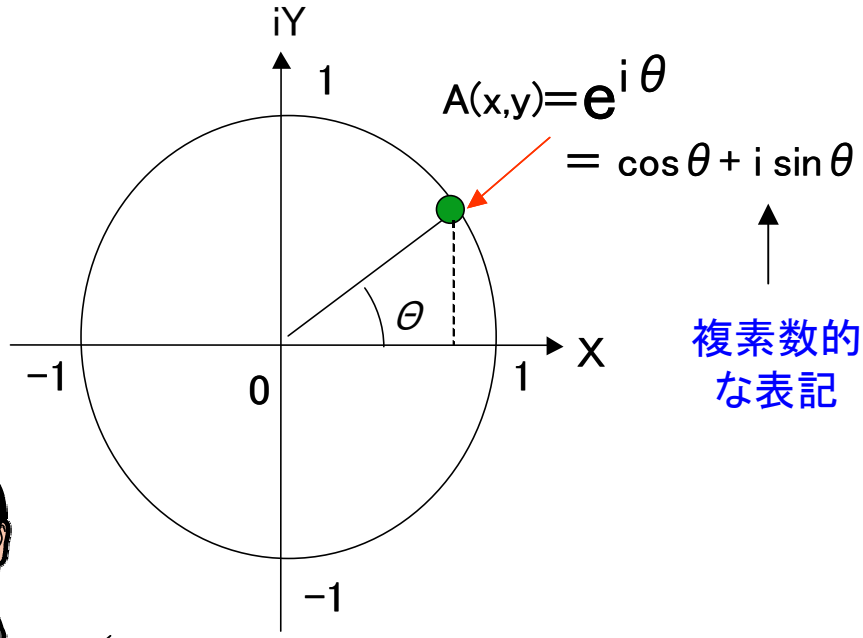
$$f(t) = \sin(2\pi ft - \phi)$$



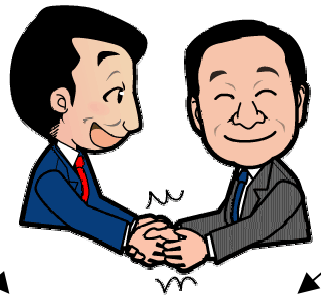
$$f(t) = C\sin(2\pi ft - \phi)$$

オイラー表記





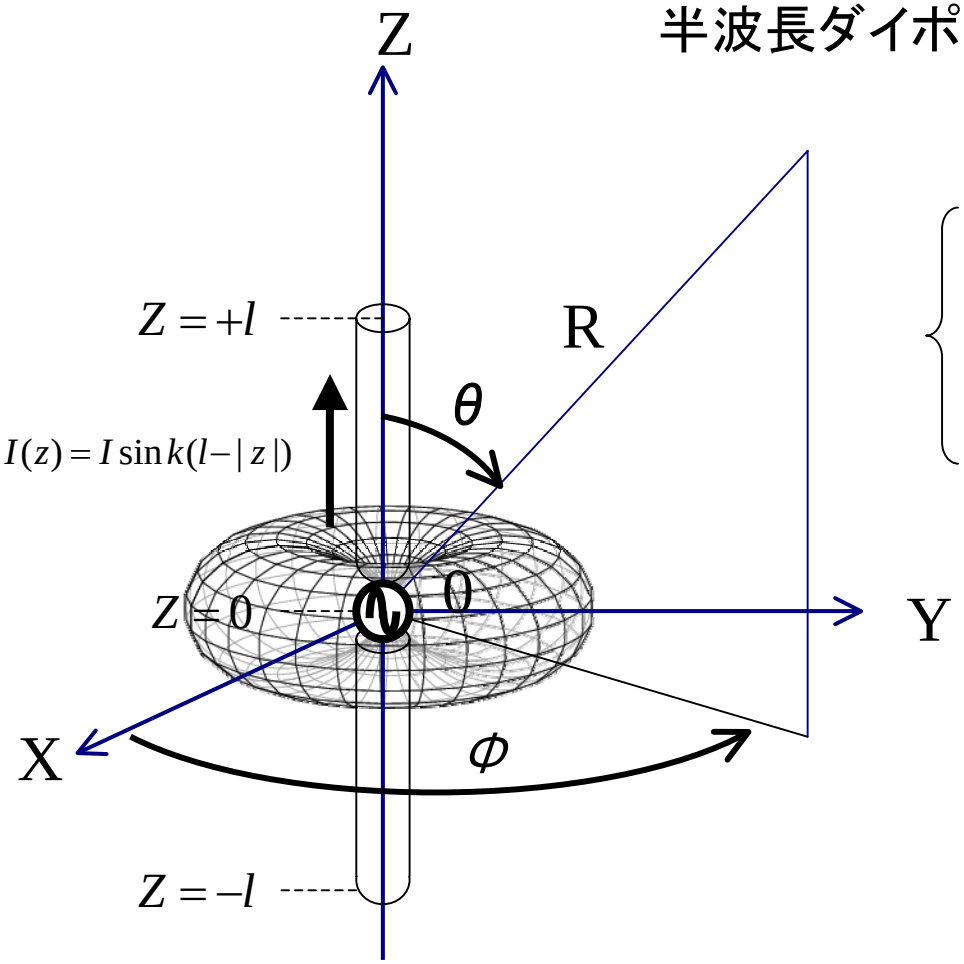
複素数的な表記



どちらの表現も振り子 ● の位置を示している.

オイラー表記

半波長ダイポールアンテナの遠方放射界



$$\begin{cases} E_\theta = j60\dfrac{I}{R}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}e^{-j\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)} \\ H_\phi = \dfrac{E_\theta}{120\pi} \end{cases}$$

4. Maxwell の方程式を理解していただきます

マックスウェル の方程式

$$\begin{cases} rot\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{D} & \cdots \ (1) \\ rot\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} & \cdots \ (2) \\ div\vec{B} = 0 & \cdots \ (3) \\ div\vec{D} = \rho & \cdots \ (4) \end{cases}$$

$\vec{H}$: 磁界ベクトル $[A/m]$

$\vec{D}$: 電束密度ベクトル $[C/m^2]$

$\vec{E}$: 電界ベクトル $[V/m]$

$\vec{B}$: 磁束密度ベクトル $[Wb/m^2]$

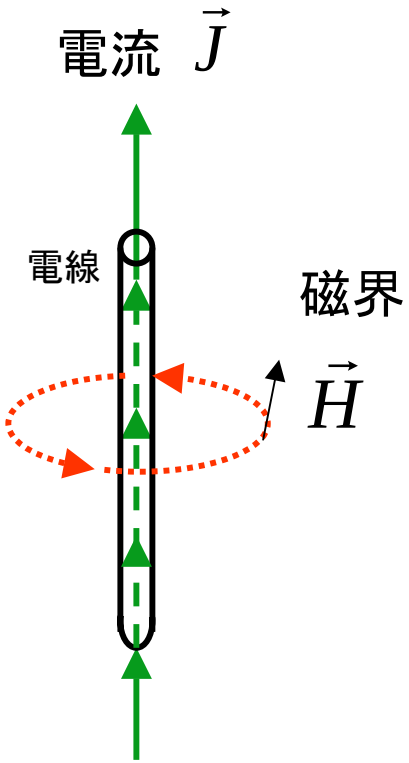
$\vec{J}$: 電流面密度ベクトル $[A/m^2]$

ρ : 電荷密度 $[C/m^3]$

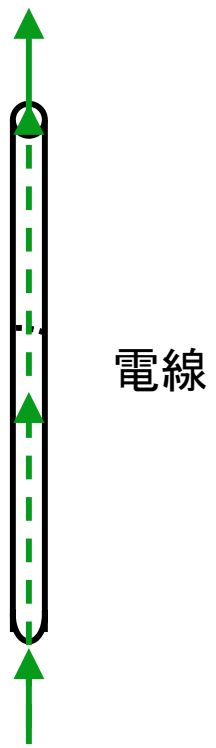
アンペールの法則

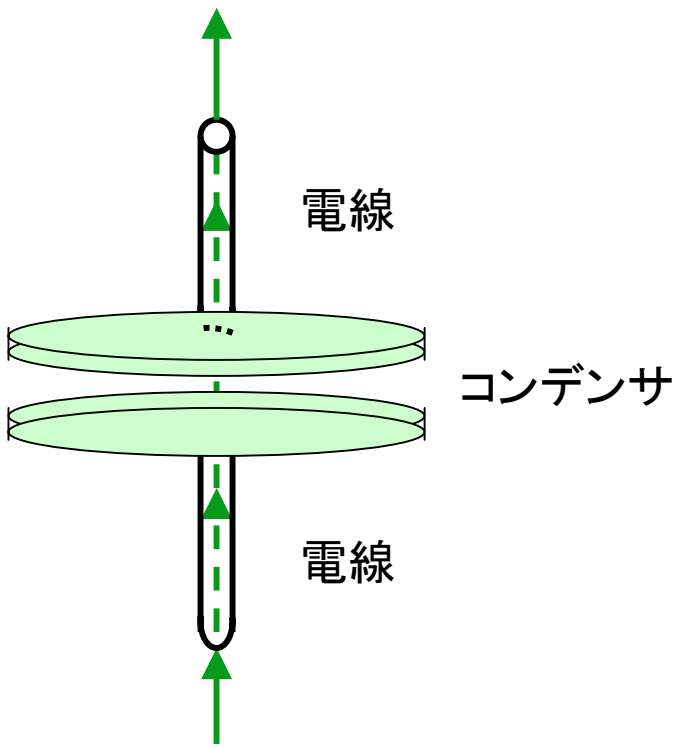
ご存知，アンペールの法則

$$rot\vec{H} = \vec{J}$$



電線とコンデンサを流れる電流





電線には，直流電流も
交流電流も流れる.

コンデンサには，直流電流は
流れず，交流電流は流れる.

アンペールの法則

マックスウェルの方程式

の第1番目の式

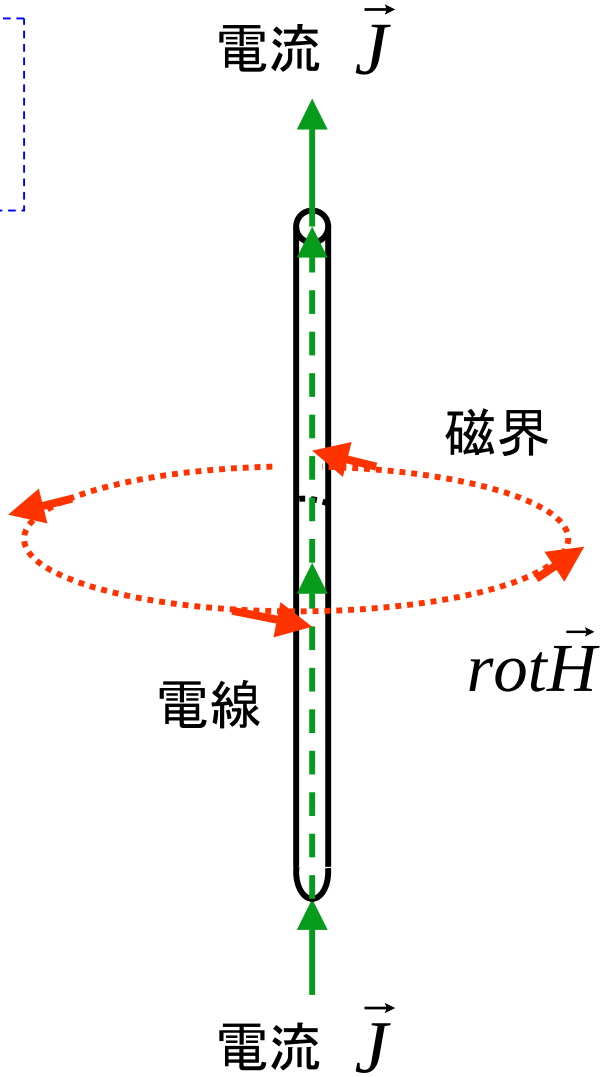
$$rot\vec{H} = \vec{J}$$

$$rot\vec{H} = \vec{J}$$

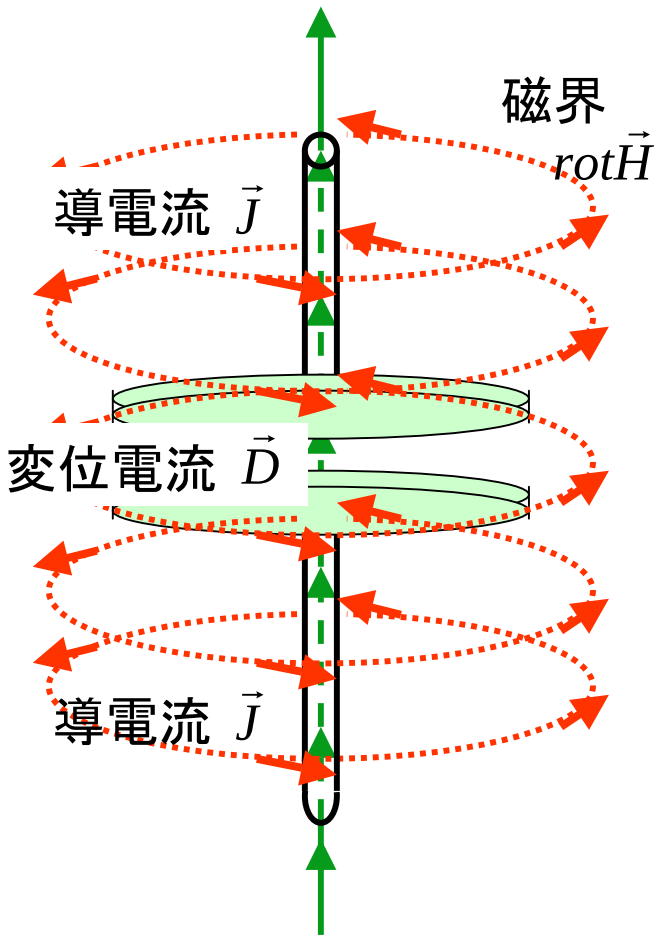
↑

rot は，右ネジ方向に回転しているという意味です．

by 根日屋



マックスウェルの変位電流



マックスウェルの方程式の第1番目の式

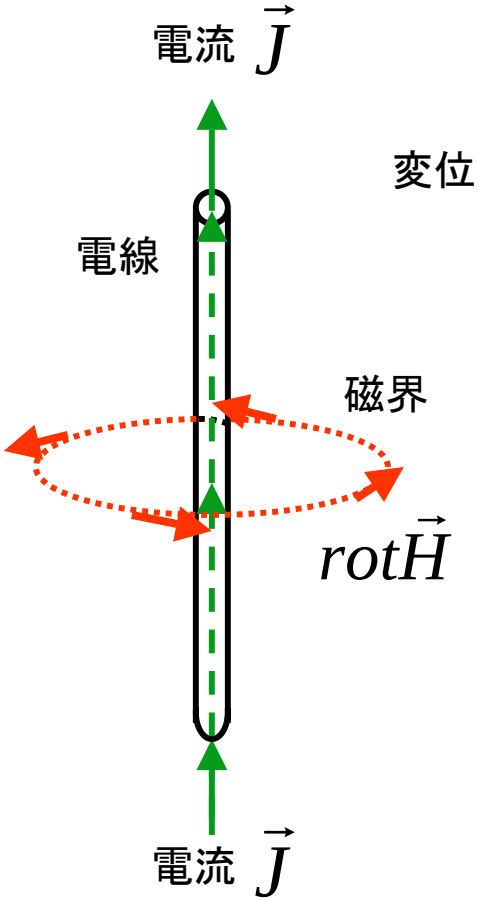
$$rot\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$

$$rot\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$

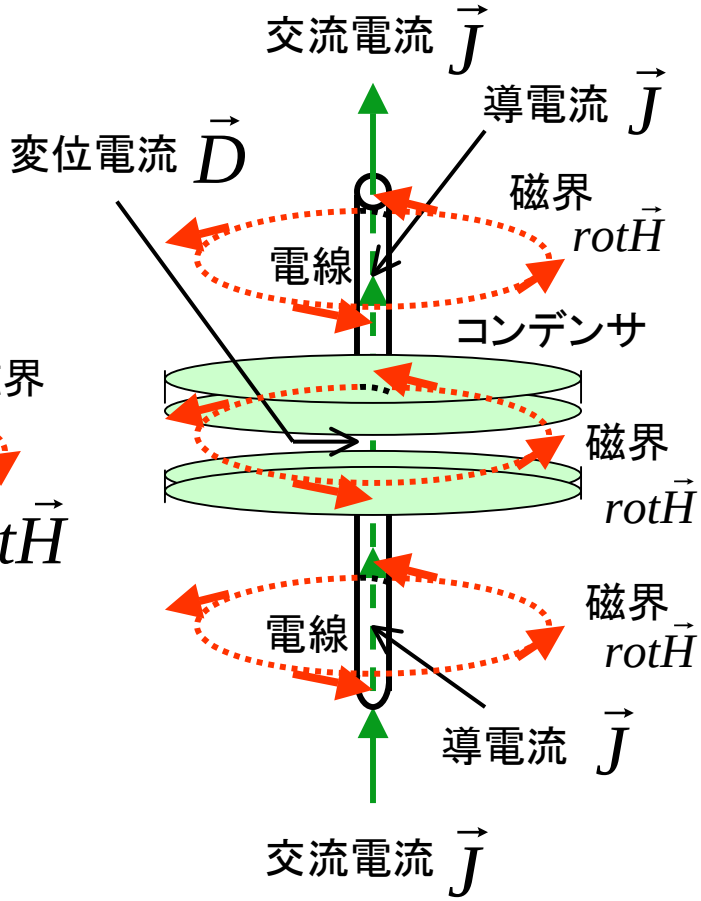
$\frac{\partial}{\partial t}$ は，時間と共に変化する，すなわち，**交流の世界**のことを示す．

by 根日屋

アンペールの法則 & マックスウェルの変位電流



(a) 電線を流れる
導電流と磁界



(b) 変位電流と磁界

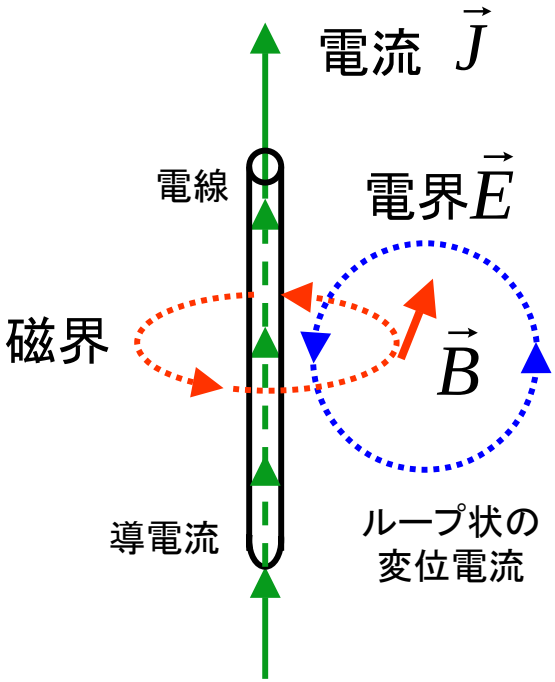
$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$

磁界を誘起 [A/m]　導電流 [A/m]　変位電流 [A/m]

意味的には変位電流密度
（電束密度の時間変化）

マックスウェルの方程式の第2番目の式

ファラデーの法則



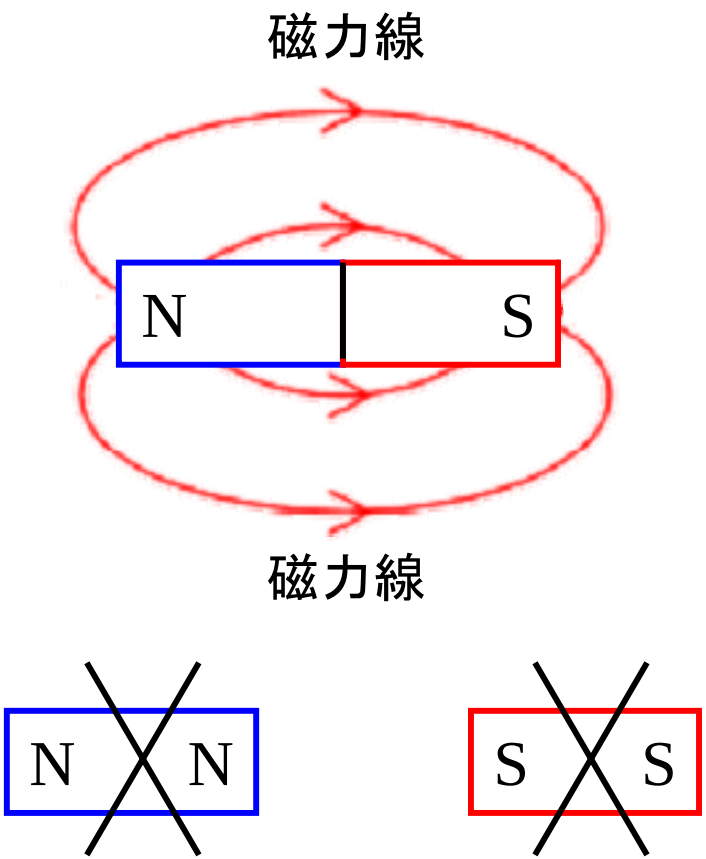
右ネジの法則と逆向き

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

交流のとき，磁界の周りには，
くるくる回る**電界**が発生する．

マックスウェルの方程式の第3番目の式

単極磁化の否定法則



div は「発散する」こと.

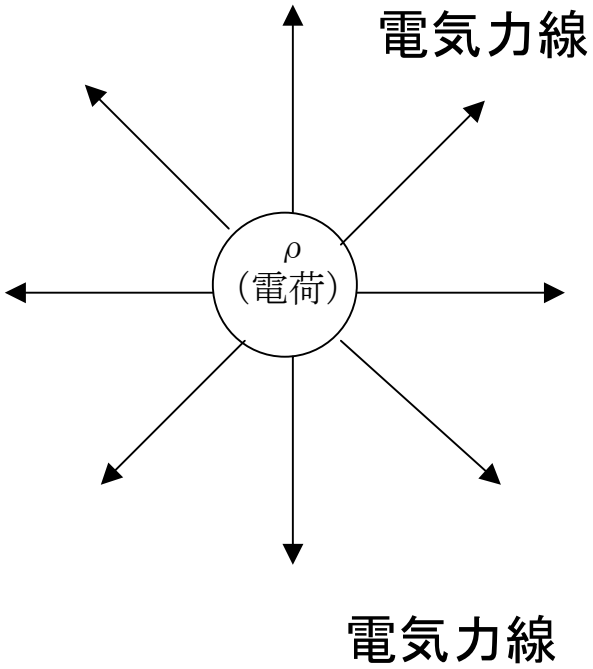
現代の電磁気学では，今のところ，単極（N 極だけとか S 極だけ）の磁石は存在せず，必ず磁石は N 極と S 極が同居している．この場合，磁力線は N 極から出て S 極に入るので，磁力線は発散しない．

$$div\vec{B} = 0$$

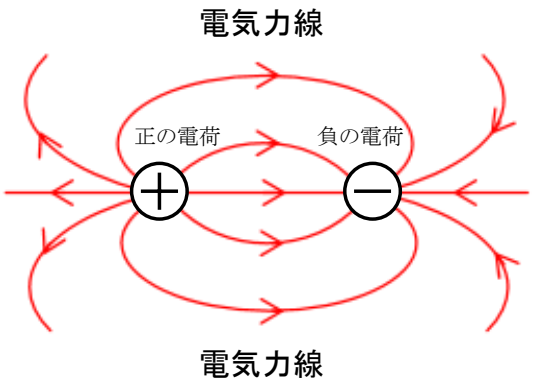
マックスウェルの方程式の第4番目の式

クーロンの法則

空間に正の電荷（ρ）を置くと，そこから電気力線が発散（湧き出す）する．正の電荷は湧き出し口，負の電荷は吸い込み口と考える．



$$div\vec{D} = \rho$$



Maxwell の方程式のまとめ

マックスウェル の方程式は ・・・ 先人の集大成 ＋ 変位電流

アンペールの法則

マックスウェルの変位電流

$$\begin{cases} rot\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{D} & \cdots (1) \\ rot\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} & \cdots (2) \end{cases}$$

ファラデーの法則

単極磁化の
否定法則

$$\begin{cases} div\vec{B} = 0 & \cdots (3) \\ div\vec{D} = \rho & \cdots (4) \end{cases}$$

クーロンの法則

マックスウェル の方程式に出てくる数式

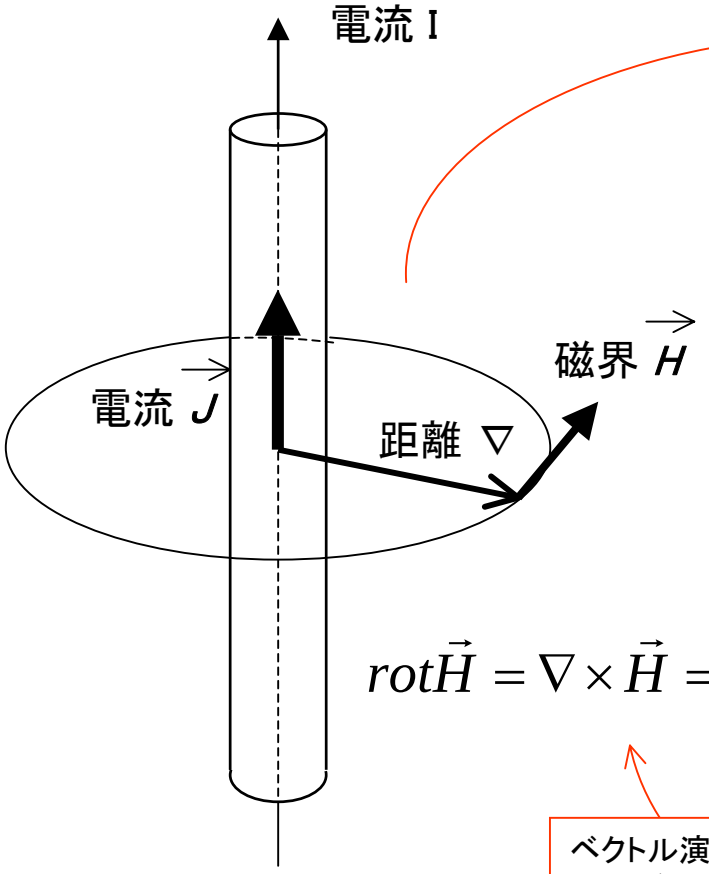
rot ： 回転（ローテーション）
→ ベクトル演算子の外積
⇒ 「右ネジ方向にくるくる回っている」と理解しよう.

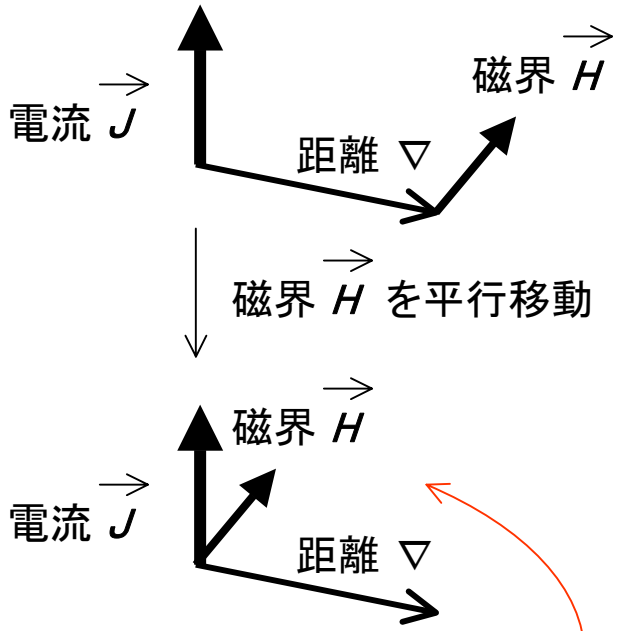
$\dfrac{\partial}{\partial t}$ ： 時間 t の偏微分の表記
→ 時間 t とともに値が変わってる.
⇒ 極論であるが，この偏微分の表記を見たら，
「交流のときに起こるのだ」と思ってよい.

div ： 発散（ダイバージェンス）
→ ベクトル演算子の内積
→ 二つのベクトルの強さの合計
⇒ 「湧き出すか」か「吸い込むか」の状態を示している.

雑　談

マックスウェル の方程式に出てくる数式 “rot（外積）”

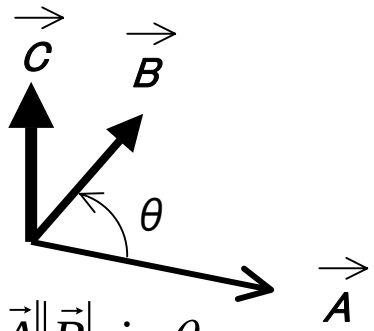




$$rot\vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

ベクトル演算子の
意味が納得できた！！

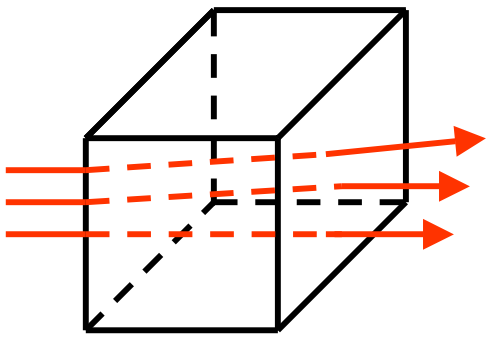
数学における
ベクトルの外積
の定義



$$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta$$

ベクトルの外積（rot）は，ただ，
回転を意味しているだけ．

マックスウェル の方程式に出てくる数式 “div（内積）”

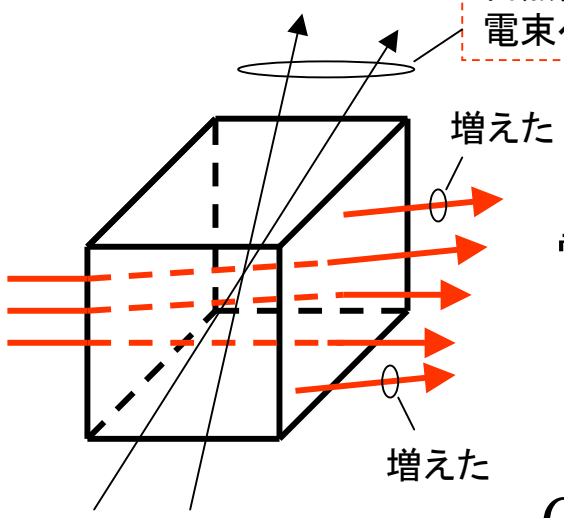


磁束ベクトル

$\vec{B}$

$div\vec{B} = 0$ ← 0 は増えていないことを示す.

自然界にはこんな
電束ベクトル $\vec{D}$ が存在



電束ベクトル

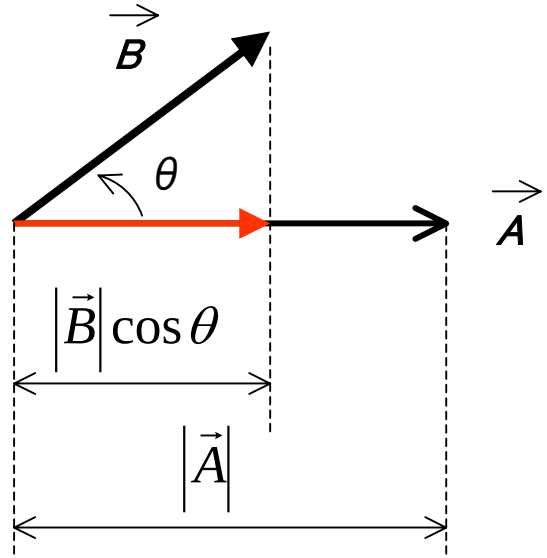
$\vec{D}$

$$div\vec{D} = \frac{\rho}{e_0}$$

← 有限値を持つことは,
増えた（減った）ことを示す.

数学における ベクトルの内積 の定義

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$



ご清聴ありがとうございました.

AMPLET Communication Laboratory

根日屋英之の著書

Hideyuki Nebiya

nebiya@amplet.sakura.ne.jp

AMPLET Communication Laboratory